Übungen zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1 Vereinfachen Sie folgende reelle Funktionen und Ausdrücke und zeichnen Sie diese: Überlegen Sie sich, ob sie dabei den Definitionsbereich verändern.

a) $\cos(\phi)^2 \cdot \tan(\phi)^2 + \sin(\phi)^2$

b) $\frac{1}{1-\sin(x)} + \frac{1}{1+\sin(x)}$

c) $\frac{1-\cos(\phi)^2}{\sin(\phi)\cdot\cos(\phi)}$

d) $e^{2\ln(\sqrt{x})}$

e) $\ln(e^{1/x}) + \ln(e^2 e^x)$

f) $\log(x^2-1) - \log(1-x)$

Aufgabe 1.2 Bestimmen Sie alle fehlenden Winkel und Seiten der gegebenen Dreiecke

a) Es seien $\gamma = 90°$; $a = 50$ cm und $b = 78{,}1$ cm

b) Es seien $a = 179$ m; $b = 208{,}3$ m und $\beta = 106°$

Aufgabe 1.3 Faktorisieren Sie die folgenden Funktionen

a) $x^3 + 3x^2 - 4$

b) $x^4 - 5x^2 + 4$

Aufgabe 1.4 Berechnen Sie mithilfe von $i = \sqrt{-1}$

a) $\sqrt{-100}$

b) $\sqrt{-9\cdot 25}$

c) $\sqrt{\frac{4}{-2{,}56}}$

d) i^2

e) i^4

f) $(-i)^{35}$

g) $(1+i)\cdot(1-i)$

h) $(3-2i)\cdot(5-4i)$

i) $\frac{10+5i}{4+3i}$

Aufgabe 1.5 Konvertieren Sie die Faktoren aus Aufgabe 1.4.g) in die Eulersche Schreibweise. Führen Sie anschließend die Multiplikation aus und konvertieren Sie das Ergebnis zurück in die Kartesische Schreibweise

Ist das Ergebnis identisch zu dem aus Aufgabe 1.4?

Aufgabe 1.6 Berechnen Sie alle komplexen Lösungen folgender Gleichungen

a) $z^2 = i$

b) $z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{25}{16} = 0$

c) $z^4 = 1$

Aufgabe 1.7 Zeigen Sie:

a) $(z_1 \pm z_2)^* = {z_1}^* \pm {z_2}^* \qquad (70)$

b) $(z_1 \cdot z_2)^* = {z_1}^* \cdot {z_2}^* \qquad (71)$

Übungen
zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1 Berechnen Sie folgende Ableitungen nach x

a) $x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3$

b) $x \cdot [\ln(x) - 1]$

c) $\frac{a+bx}{c+dx}$

d) $\sin(x^n)\cos(x)$

Aufgabe 2.2 Diskutieren und zeichnen Sie die angegebene Funktion

$$f(x) = x^4 \cdot (1 - x)$$

Tipp: $36^2 = 1296$; $64^2 = 4096$

Aufgabe 2.3 Es soll ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b in den Einheitskreis passen.

Bestimmen Sie a und b so, dass der Flächeninhalt $F = a \cdot b$ maximal wird.

Aufgabe 2.4 Entwickeln Sie die Taylorreihe der folgenden beiden Funktionen bis zum einschließlich 2. Taylorpolynom (3 Glieder)

a) $f(x) = \sqrt{1-x}$

b) $f(x) = \ln(1+x)$

Aufgabe 2.5 Berechnen Sie den Nullpunkt Ihres Taylorpolynoms aus Aufgabe 2.4.a)

Wie weit liegt dieser von tatsächlichen Nullpunkt entfernt?
Tipp: $\sqrt{12} \approx 3,46$

Aufgabe 2.6 Berechnen Sie mithilfe der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^\alpha} \right), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2.7 Beweisen Sie die Summenregel der Ableitung

$$\frac{d}{dt}\left(z(t) \pm y(t)\right) = \frac{d}{dx}z(t) \pm \frac{d}{dx}y(t)$$

Übungen
zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1 „Knacken“ Sie folgende Integrale

a) $\int 10x^4 + 4x^3 dx$

b) $\int 8x^3 - 12x^2 - 10x + 5 dx$

c) $\int 360 \cdot \cos(3x) dx$

d) $\int_{x=0}^{\pi} x^2 \cos(x) dx$

e) $\int \sin(x)\cos(x) dx$

f) $\int_{x=0}^{\sqrt[3]{2{,}5}} x^2 \sqrt{2x^3 + 4} dx$

g) $\int_{x=1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{7-3x}}$

h) $\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b} dy dx$

i) $\int_{n=1}^{2} \int_{u=2}^{4} n(1+u) du dn$

Aufgabe 3.2 Zeigen Sie: Das gegebene Integral hat für kein $\alpha \in (0, \infty)$ eine Lösung

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$$

Tipp: Betrachten Sie den Fall $\alpha = 1$ gesondert.

Aufgabe 3.3 Welche Ordnung haben folgende Differentialgleichungen? (Freitag)
Sind sie gewöhnlich, linear und / oder homogen?

Aufgabe	Ordnung	Gewöhnlich	Linear	Homogen
a) $y''' + y'' + y = 0$				
b) $y''y - y'y = 1$				
c) $\frac{df}{dx}(x, y) = -f(x, y)$				
d) $\frac{df}{dx}(x, y) = -\frac{df}{dy}(x, y)$				
e) $\ddot{k} + 3\dot{k} = \frac{1}{12}k$				
f) $y^{(n)} = 1$				

Aufgabe 3.4 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen (Freitag)

a) $3y' + 12y = 0$

b) $\frac{1}{10}y'(x) = x$

c) $4y'' - 12y' + 9y = 0$

Aufgabe 3.5 Bestimmen Sie die spezielle Lösung folgender Anfangswertprobleme (Freitag)

a) $\frac{1}{2}\frac{dy}{dx} + y = 0$
$y(0) = 3$

b) $\frac{4}{7}y' + \frac{6}{5}y = 0$
$y(10) = 1$

c) $\ddot{y} + 2y = 2\dot{y}$
$y(\frac{\pi}{2}) = 1; \quad y(\pi) = 0$

Übungen
zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 4 zum Wochenende

Aufgabe 4.1 Berechnen Sie folgende komplexe Ausdrücke

a) $(i+4) + (2i-3)$

b) $(-i+5) + (5-i)$

c) $(26-14i) - (16+4i)$

d) $3i\cdot(2-i)$

e) $6\cdot(12-3i)$

f) $(4i+3)\cdot(4i-3)$

g) $(5i+3)\cdot(4i+1)$

h) $(7-2i)\cdot(3i+5)$

i) $\frac{1}{2i}$

j) $\frac{5}{3i+4}$

k) $\frac{52+13i}{5-i}$

l) $\left(\frac{1}{2i}\right)^3$

Aufgabe 4.2 Es sollen alle Lösungen folgender komplexer Gleichungen gefunden werden. Zeichnen Sie diese in die komplexe Ebene ein.

a) $z^2+z(-2-2i)-2i+3 = 0$

b) $z^2-(2+i)z+i = -1$

Tipp: $\sqrt{-3+4i} = 1+2i$.

c) $z = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{1+i}$

d) $z+2i = \sqrt{-4}$

e) $z^4 = e^i$

f) $z = e^{2+\pi i}$

Aufgabe 4.3 Berechnen Sie mithilfe der Logarithmengesetze:

a) $\log(100)$

b) $\mathrm{lb}(32)$

c) $\frac{\ln(100)}{\ln(10)}$

d) $\log(54d)-\log(0{,}54\mathrm{d})$

e) $\log(5x)+\log(2x)$

f) $\log_9(3)+\log_{81}(9)$

Aufgabe 4.4 Bestimmen Sie das Taylorpolynom von $\cos(x)$ im Punkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und beweisen Sie so, dass der Cosinus ein um 90° verschobener Sinus ist.

Aufgabe 4.5 Berechnen Sie:

a) $\frac{d}{dx}e^{x^2}$

b) $\frac{d}{dx}\ln(\tan(x)), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

c) $\int(n+1)\cos(x)^n\cdot\sin(x)dx$

Übungen
zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 Gegeben seien die Basen $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$, sowie zwei Vektoren $\vec{v_1}$ der Basis 1 und $\vec{v_2}$ der Basis 2. Wandeln Sie $\vec{v_1}$ in Basis 2 und $\vec{v_2}$ in Basis 1 um.

$\mathbb{B}_1 = \{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$, $\mathbb{B}_2 = \{\vec{e_u}, \vec{e_v}, \vec{e_w}\}$ mit $\vec{e_u} = 3\vec{e_x}$; $\vec{e_v} = \frac{1}{2}\vec{e_z}$ und $\vec{e_w} = 2\vec{e_y}$. Weiterhin sei

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ und } \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5.2 Falls möglich, berechnen Sie folgende Ausdrücke. Falls nicht, geben Sie eine Begründung an.

a) $\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix}$

b) $5 \cdot \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,6 \\ 2,0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 14 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

k) $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

l) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$

Aufgabe 5.3 Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation der angegebenen Vektorfelder:

a) $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

b) $\vec{v} = \begin{bmatrix} yz^2 \\ 0 \\ z\sin(x) \end{bmatrix}$

Aufgabe 5.4 Zeigen Sie, dass $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$ ist für jedes beliebige Vektorfeld $\vec{v}$.

Übungen
zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1 Überprüfen Sie, ob sich die folgenden Geraden / Ebenen schneiden. Falls ja, geben Sie den Schnittpunkt bzw. die Schnittgerade an.

a) $\vec{g_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \vec{g_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\vec{g_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \vec{g_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $E:\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18; \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $E_1:\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1; \quad E_2:\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$

Aufgabe 6.2 Liegen die Punkte (1|3|-6) und (5|-5|4) auf folgender Ebene?

$$E: \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

Aufgabe 6.3 Gegeben Sei die Ellipse $2x^2 + 5y^2 - 20x + 49 = 0$ in der x/y-Ebene. Schneidet sie folgende Ebenen und wenn ja, in welchen Punkten?

a) $\vec{E} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $E: \quad x + 2z = 5$

Aufgabe 6.4 Wiederholung: Gegeben Sei das skalare Potential der Erdanziehungskraft: $\Phi(r) = -G\frac{M_{Erde}}{r}$.

a) Berechnen Sie die ersten beiden Taylorpolynome an der Stelle $r = r_e$, dem Radius der Erde.

b) Ersetzen Sie jetzt $(r - r_e)$ durch z und $G\frac{M_{Erde}}{{r_e}^2}$ durch g. Außerdem können Sie die Konstante weg lassen, da ein Potential immer eine frei wählbare Konstante hat. Wenn Sie richtig gerechnet haben, erhalten Sie folgende Näherungsformel für das Gravitationspotential in der Nähe der Erdoberfläche:

$$\Phi \approx gz - \frac{g}{r_e}z^2$$

c) Berechnen Sie hieraus die wirkende Beschleunigung $\vec{a} = -\text{grad}(\Phi)$.

d) Zeigen Sie explizit, dass das Kraftfeld Wirbelfrei ist, d.h. $\text{rot}(\vec{a}) = 0$.

Übungen
zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1 Bilden Sie das Produkt AB aus folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7.2 Zeigen Sie z.B. anhand der Matrizen aus Aufgabe 7.1, dass im allgemeinen gilt $AB \neq BA$.

Aufgabe 7.3 Bestimmen Sie die Transponierten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ i & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -i \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7.4 Gegeben seien zwei Matrizen A und B. Zeigen Sie, dass Matrix B die Inverse von Matrix A ist, bzw. A die Inverse von B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 5 \\ 7 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7.5 Ermitteln Sie die Inverse von A:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7.6 Berechnen Sie die Determinante von:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7.7 Beweisen Sie, dass $(AB)^T = B^T A^T$.

Übungen zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1 Gegeben sind folgende Vektoren in kartesischen Koordinaten.
Wandeln Sie diese um in Polar- bzw. Zylinder und Kugelkoordinaten.

a) $\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -10\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Aufgabe 8.2 Integrieren Sie:

a) $\int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{1} x^2 dx dy$

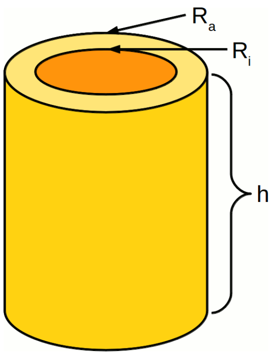
b) $\int_{x=0}^{1} \int_{y=y_0}^{y_1} \int_{z=z_0}^{z_1} e^{az} dz dy dx$

c) $\int_{x=0}^{2} \int_{y=x-1}^{3x} x^2 dy dx$

d) $\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2x} \int_{z=0}^{x+y} dz dy dx$

Warum müssen Sie bei den Aufgaben c) und d) die Reihenfolge beachten?

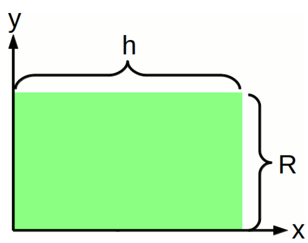
Aufgabe 8.3 Berechnen Sie das Volumen eines Zylinderrings mit dem inneren Radius R_i, dem äußeren Radius R_a und der Höhe h



Aufgabe 8.4 Ein Rechteck der Länge h und der Breite R rotiert um die x-Achse. Dabei entsteht ein Zylinder.

a) Berechnen Sie das Volumen des Zylinders durch geschickte Integration.

b) Berechnen Sie das Volumen des Zylinders mithilfe der Guldinsche Regel.



Aufgabe 8.5 Beweisen Sie die 2. Guldinsche Regel mithilfe der Definition des Schwerpunktes:

$$S = \frac{1}{A} \cdot \int_A \rho \, dz \, d\rho$$

Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1 Vereinfachen Sie folgende reelle Funktionen und Ausdrücke und zeichnen Sie diese: Überlegen Sie sich, ob sie dabei den Definitionsbereich verändern.

a) $\cos(\phi)^2 \cdot \tan(\phi)^2 + \sin(\phi)^2 = 2 \cdot \sin(\phi)^2$
Erweiterung des D. bei $\phi = \pm\{\frac{1}{2}\pi;\ \frac{3}{2}\pi;\ \frac{4}{2}\pi;\ ...\}$

b) $\frac{1}{1-\sin(x)} + \frac{1}{1+\sin(x)} = cos(x)^{-2}$
Der Definitionsbereich wird nicht verändert.

c) $\frac{1-\cos(\phi)^2}{\sin(\phi)\cdot\cos(\phi)} = \tan(\phi)$
Erweiterung bei $\phi = \pm\{...;\ -2\pi;\ -\pi;\ 0;\ \pi;\ 2\pi;\ ...\}$

d) $e^{2\ln(\sqrt{x})} = x$
Erweiterung des D. auf $x \leq 0$

e) $\ln(e^{1/x}) + \ln(e^2 e^x) = \frac{1}{x} + 2 + x$
Der Definitionsbereich wird nicht verändert.

f) $\log(x^2-1) - \log(1-x) = -\log(-x-1)$
Der Definitionsbereich wird nicht verändert.

Aufgabe 1.2 Bestimmen Sie alle fehlenden Winkel und Seiten der gegebenen Dreiecke

a) Es seien $\gamma = 90°$; $a = 50$ cm und $b = 78{,}1$ cm $\Rightarrow$
$c = 92{,}73$ cm; $\alpha = 32{,}63°$; $\beta = 57{,}38°$

b) Es seien $a = 179$ m; $b = 208{,}3$ m und $\beta = 106°$ $\Rightarrow$
$c = 68{,}06$ m; $\alpha = 55{,}69°$; $\gamma = 18{,}31°$

Aufgabe 1.3 Faktorisieren Sie die folgenden Funktionen

a) $x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

Aufgabe 1.4 Berechnen Sie mithilfe von $i = \sqrt{-1}$

a) $\sqrt{-100} = \pm 10i$

b) $\sqrt{-9\cdot 25} = \pm 15i$

c) $\sqrt{\frac{4}{-2{,}56}} = \pm\frac{5}{4}i$

d) $i^2 = -1$

e) $i^4 = 1$

f) $(-i)^{35} = i$

g) $(1+i)\cdot(1-i) = 2$

h) $(3-2i)\cdot(5-4i) = 7-22i$

i) $\frac{10+5i}{4+3i} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$

Aufgabe 1.5 Konvertieren Sie die Faktoren aus Aufgabe 1.4.g) in die Eulersche Schreibweise. Führen Sie anschließend die Multiplikation aus und konvertieren Sie das Ergebnis zurück in die Kartesische Schreibweise

Ist das Ergebnis identisch zu dem aus Aufgabe 1.4?
$(1+i)(1-i) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} = 2e^0 = 2$ (Natürlich kommt das Selbe heraus.)

Aufgabe 1.6 Berechnen Sie alle komplexen Lösungen folgender Gleichungen

a) $z^2 = i \Rightarrow z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

b) $z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{25}{16} = 0 \Rightarrow z = -\frac{3}{4} \pm i$

c) $z^4 = 1 \Rightarrow z \in \{1;\ i;\ -1;\ -i\}$

Aufgabe 1.7 Zeigen Sie:

a) $(z_1 \pm z_2)^* = (x_1 + iy_1 \pm x_2 \pm iy_2)^* = x_1 - iy_1 + \pm x_2 \mp iy_2 = (x_1+iy_1)^* \pm (x_2+iy_2)^* = {z_1}^* \pm {z_2}^*$

b) $(z_1 \cdot z_2)^* = (x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2))^* = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = {z_1}^* \cdot {z_2}^*$

Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1 Berechnen Sie folgende Ableitungen nach x

a) $\frac{d}{dx}(x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3) = 5x^4 - 4x^3 + x^2$

b) $\frac{d}{dx}(x \cdot [\ln(x) - 1])' = \ln(x)$

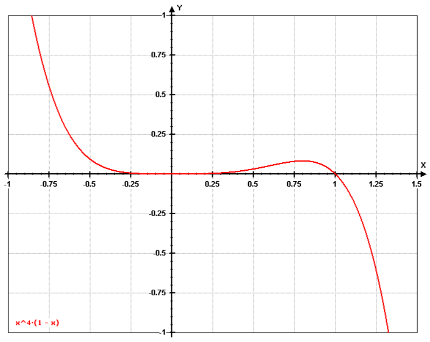
c) $\frac{d}{dx}(\frac{a+bx}{c+dx}) = \frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$

d) $\frac{d}{dx}(\sin(x^n)\cos(x)) = nx^{n-1}\cos(x^n)\cos(x) - \sin(x^n)\sin(x)$

Aufgabe 2.2 Diskutieren und zeichnen Sie die angegebene Funktion

$$f(x) = x^4 \cdot (1 - x)$$

Nullstellen: $x = 0 \lor x = 1$
Extrema: Tiefpunkt (0|0); Hochpunkt (0,8|0,08192)
Wendepunkte: WP (0,6|0,05184)



Aufgabe 2.3 Es soll ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b in den Einheitskreis passen.

Bestimmen Sie a und b so, dass der Flächeninhalt $F = a \cdot b$ maximal wird.
Es ist $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 2.4 Entwickeln Sie die Taylorreihe der folgenden beiden Funktionen bis zum einschließlich 2. Taylorpolynom (3 Glieder)

a) $f(x) = \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$

b) $f(x) = \ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$

Aufgabe 2.5 Berechnen Sie den Nullpunkt Ihres Taylorpolynoms aus Aufgabe 2.4.a)

Wie weit liegt dieser von tatsächlichen Nullpunkt entfernt?
Der Nullpunkt der Taylorreihe liegt bei $x = 1{,}46$ und ist damit 0,46 vom realen Nullpunkt $x = 1$ entfernt

Aufgabe 2.6 Berechnen Sie mithilfe der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^\alpha}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2.7 Beweisen Sie die Summenregel der Ableitung

$$\frac{d}{dt}\left(z(t) \pm y(t)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{z(t+h) \pm y(t+h) - z(t) \mp y(t)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{z(t+h)-z(t)}{h} \pm \frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right) =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{z(t+h)-z(t)}{h}\right) \pm \lim_{h\to 0}\left(\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right) = \frac{d}{dt}z(t) \pm \frac{d}{dt}y(t)$$

Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1 „Knacken“ Sie folgende Integrale

a) $\int 10x^4 + 4x^3 dx \;=\; 2x^5 + x^4 + C$

b) $\int 8x^3 - 12x^2 - 10x + 5 dx \;=\; 2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 5x + C$

c) $\int 360 \cdot \cos(3x) dx \;=\; 120 \sin(3x)$

d) $\int_{x=0}^{\pi} x^2 \cos(x) dx \;=\; \left[(x^2-2)\sin(x) + 2\cos(x)\right]_{x=0}^{\pi} \;=\; -2\pi$

e) $\int \sin(x)\cos(x) dx \;=\; \frac{1}{2}\sin(x)^2 + C \;=\; -\frac{1}{2}\cos(x)^2 + C$

f) $\int_{x=0}^{\sqrt[3]{2,5}} x^2 \sqrt{2x^3+4} dx \;=\; \frac{1}{9}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_{y=4}^{9} \;=\; \frac{19}{9}$

g) $\int_{x=1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{7-3x}} \;=\; -\frac{1}{6}\left[\sqrt{7-3x}\right]_{x=1}^{2} \;=\; \frac{1}{6}$

h) $\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} dy dx \;=\; ab$

i) $\int_{n=1}^{2}\int_{u=2}^{4} n(1+u) du dn \;=\; 12$

Aufgabe 3.2 Zeigen Sie: Das gegebene Integral hat für kein $\alpha \in (0,\infty)$ eine Lösung

$$\int_{x=0}^{\infty} f_\alpha(x) dx \;=\; \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Betrachten wir zunächst den Fall $\alpha = 1$:
Dann ist das Integral ausführt: $F_1(x) = \ln(x)$ Der $\ln(x)$ geht für $x \to 0$ gegen $-\infty$ und für $x \to \infty$ gegen $+\infty$. Damit kann das Integral für $\alpha = 1$ keine Lösung haben.

Ist $0 < \alpha < 1$, so wird die Stammfunktion $F_\alpha(x) = \frac{-1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Dann ist die Potenz von x negativ. Damit ist $F_\alpha(0) = 0$, aber für $x \to \infty$ geht $x^{\alpha-1} \to 0$ und $\frac{1}{x^{\alpha-1}} \to \infty$ und das Integral hat ebenfalls keine Lösung.

Es bleibt als letztes der Fall $\alpha > 1$ zu diskutieren:
Hier ist die Stammfunktion ebenfalls $F_\alpha(x) = \frac{-1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Jetzt ist aber die Potenz von x positiv. Damit ist $\lim_{x\to\infty}(F_\alpha(x)) = 0$ und $\lim_{x\to 0}(F_\alpha(x)) = \infty$, sodass das Integral ebenfalls keine Lösung besitzt.

Zusammenfassend hat das Integral für keinen der Werte $\alpha > 0$ eine Lösung was mit der Behauptung aus der Aufgabenstellung äquivalent ist.

Übungen
zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 3

Aufgabe 3.3 Welche Ordnung haben folgende Differentialgleichungen? (Freitag)
Sind sie gewöhnlich, linear und / oder homogen?

Aufgabe	Ordnung	Gewöhnlich	Linear	Homogen
a) $y''' + y'' + y = 0$	3	ja	ja	ja
b) $y''y - y'y = 1$	2	ja	nein	nein
c) $\frac{df}{dx}(x, y) = -f(x, y)$	1	ja	ja	ja
d) $\frac{df}{dx}(x, y) = -\frac{df}{dy}(x, y)$	1	nein	ja	ja
e) $\ddot{k} + 3\dot{k} = \frac{1}{12}k$	2	ja	ja	ja
f) $y^{(n)} = 1$	n	ja	ja	nein

Aufgabe 3.4 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen (Freitag)

a) $3y' + 12y = 0$
$y = C \cdot e^{-4x}$

b) $\frac{1}{10}y'(x) = x$
$y = 5x^2 + C$

c) $4y'' - 12y' + 9y = 0$
$y = C \cdot e^{1,5x}$

Aufgabe 3.5 Bestimmen Sie die spezielle Lösung folgender Anfangswertprobleme (Freitag)

a) $\frac{1}{2}\frac{dy}{dx} + y = 0$
$y(0) = 3$
$y = 3 \cdot e^{-2x}$

b) $\frac{4}{7}y' + \frac{6}{5}y = 0$
$y(10) = 1$
$y = e^{21(1-\frac{x}{10})}$

c) $\ddot{y} + 2y = 2\dot{y}$
$y(\frac{\pi}{2}) = 1; \quad y(\pi) = 0$
$y = \sin(x) \cdot e^{x-\frac{\pi}{2}}$

Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 4 zum Wochenende

Aufgabe 4.1 Berechnen Sie folgende komplexe Ausdrücke

a) $(i+4)+(2i-3) = 1+3i$

b) $(-i+5)+(5-i) = 10$

c) $(26-14i)-(16+4i) = 10-10i$

d) $3i\cdot(2-i) = 3+6i$

e) $6\cdot(12-3i) = 72-18i$

f) $(4i+3)\cdot(4i-3) = -25$

g) $(5i+3)\cdot(4i+1) = -17-17i$

h) $(7-2i)\cdot(3i+5) = 41+11i$

i) $\frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$

j) $\frac{5}{3i+4} = \frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$

k) $\frac{52+13i}{5-i} = \frac{19}{2}+\frac{9}{2}i$

l) $\left(\frac{1}{2i}\right)^3 = \frac{1}{8}i$

Aufgabe 4.2 Es sollen alle Lösungen folgender komplexer Gleichungen gefunden werden. Zeichnen Sie diese in die komplexe Ebene ein.

a) $z^2+z(-2-2i)-2i+3 = 0 \quad\Leftrightarrow$
$z = -i \quad\vee\quad z = 2+3i$

b) $z^2-(2+i)z+i = -1 \quad\Leftrightarrow\quad z = 1 \quad\vee\quad z = 1+i$

c) $z = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{1+i} \quad\Leftrightarrow\quad z = 2^{-\frac{1}{6}}\{e^{\frac{\pi}{12}i};\ e^{\frac{5}{12}\pi i};\ e^{\frac{9}{12}\pi i}\}$

Tipp: $\sqrt{-3+4i} = 1+2i$.

d) $z+2i = \sqrt{-4} \quad\Leftrightarrow\quad z = \{0;\ -4i\}$

e) $z^4 = e^i \quad\Leftrightarrow$
$z = \{e^{\frac{1}{4}i};\ e^{(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{2})i};\ e^{(\frac{1}{4}+\pi)i};\ e^{(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\pi)i}\}$

f) $z = e^{2+\pi i} \quad\Leftrightarrow\quad -e^2 \approx -7{,}3891$

Aufgabe 4.3 Berechnen Sie mithilfe der Logarithmengesetze:

a) $\log(100) = 2$

b) $\mathrm{lb}(32) = 5$

c) $\frac{\ln(100)}{\ln(10)} = 2$

d) $\log(54d)-\log(0{,}54\mathrm{d}) = 2$

e) $\log(5x)+\log(2x) = 1+2\log(x)$

f) $\log_9(3)+\log_{81}(9) = 1$

Aufgabe 4.4 Bestimmen Sie das Taylorpolynom von $\cos(x)$ im Punkt $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und beweisen Sie so, dass der Cosinus ein um 90° verschobener Sinus ist.

Es ist $\cos'(x) = -sin(x)$, $\cos''(x) = -cos(x)$, $\cos'''(x) = sin(x)$, $\cos^{(4)}(x) = cos(x)$, ...
Weiterhin ist $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Damit sind alle geraden Ableitungen an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ gleich 0 und die Ungeraden Ableitungen alternieren zwischen +1 und -1. Für das Taylorpolynom von $\cos(x)$ an der selben Stelle ergibt sich also:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^{(n)}(\frac{\pi}{2})}{n!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}$$

Für den Sinus an der Stelle π ergibt sich analog:
$\sin(\pi) = 0$, $\sin'(\pi) = \cos(\pi) = -1$, $\sin''(\pi) = -\sin(\pi) = 0$, $\sin'''(\pi) = -\cos(\pi) = 1$,
$\sin^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$, ... Damit ist

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}$$

Aufgabe 4.5 Berechnen Sie:

a) $\frac{d}{dx}e^{x^2} = e^{x^2}\cdot 2x$

b) $\frac{d}{dx}\ln(\tan(x)), \quad 0<x<\frac{\pi}{2}$
$= \mathrm{cotan}(x)+\tan(x)$

c) $\int(n+1)\cos(x)^n\cdot\sin(x)dx$
$= \cos(x)^{n+1}$

Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 Gegeben seien die Basen $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$, sowie zwei Vektoren $\vec{v_1}$ der Basis 1 und $\vec{v_2}$ der Basis 2. Wandeln Sie $\vec{v_1}$ in Basis 2 und $\vec{v_2}$ in Basis 1 um.

$\mathbb{B}_1 = \{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$, $\mathbb{B}_2 = \{\vec{e_u}, \vec{e_v}, \vec{e_w}\}$ mit $\vec{e_u} = 3\vec{e_x}$; $\vec{e_v} = \frac{1}{2}\vec{e_z}$ und $\vec{e_w} = 2\vec{e_y}$. Weiterhin sei

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{xyz} = 3\vec{e_x} + \vec{e_y} + 2\vec{e_z} = \vec{e_u} + \tfrac{1}{2}\vec{e_w} + 4\vec{e_v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{uvw}$$

$$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}_{xyz} = 2\vec{e_u} + 2\vec{e_v} + 2\vec{e_w} = 6\vec{e_x} + \vec{e_z} + 4\vec{e_y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}_{uvw}$$

Aufgabe 5.2 Falls möglich, berechnen Sie folgende Ausdrücke. Falls nicht, geben Sie eine Begründung an.

a) $\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $5 \cdot \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,6 \\ 2,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ Geht nicht, da die beiden Vektoren unterschiedlich viele Dimensionen haben und aus unterschiedlichen Vektorräumen stammen.

e) $\begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -2 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

g) $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix} = -10$

h) $\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 228 \\ 35 \\ -159 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ -70 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Geht nicht, da das Kreuzprodukt nur für Vektoren der Dimension 3 definiert ist.

k) $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ Geht nicht, da das Kreuzprodukt nur für Vektoren definiert ist.

l) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 0$

Aufgabe 5.3 Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation der angegebenen Vektorfelder:

a) $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{v} = 1 + 1 + 1 = 3; \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\vec{v} = \begin{bmatrix} yz^2 \\ 0 \\ z\sin(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{v} = \sin(x); \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2yz - z \cdot \cos(x) \\ -z^2 \end{bmatrix}$

Aufgabe 5.4 Zeigen Sie, dass $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$ ist für jedes beliebige Vektorfeld $\vec{v}$.

Sei $\vec{v} = \begin{bmatrix} a(x;\ y;\ z) \\ b(x;\ y;\ z) \\ c(x;\ y;\ z) \end{bmatrix}$. So gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \vec{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dc}{dy} - \frac{db}{dz} \\ \frac{da}{dz} - \frac{dc}{dx} \\ \frac{db}{dx} - \frac{da}{dy} \end{bmatrix} = \frac{d^2c}{dxdy} + \frac{d^2a}{dydz} + \frac{d^2b}{dzdx} - \frac{d^2b}{dxdz} - \frac{d^2c}{dxdy} - \frac{d^2a}{dxdz} = 0$$

Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1 Überprüfen Sie, ob sich die folgenden Geraden / Ebenen schneiden. Falls ja, geben Sie den Schnittpunkt bzw. die Schnittgerade an.

a) $\vec{g_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \vec{g_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$ Es gibt keinen Schnittpunkt.

b) $\vec{g_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \vec{g_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$ Schnittpunkt ist $\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

c) $E: \ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18; \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$ Es gibt keinen Schnittpunkt.

d) $E_1: \ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1; \quad E_2: \ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \quad \Rightarrow$ Schnittgerade ist $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

Aufgabe 6.2 Liegen die Punkte (1|3|-6) und (5|-5|4) auf folgender Ebene?

$$E: \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

Einsetzen in die Ebenengleichung liefert für den ersten Punkt $11 = 1$ und für den zweiten $1 = 1$. Damit liegt der erste Punkt nicht auf der Ebene, der zweite schon.

Aufgabe 6.3 Gegeben Sei die Ellipse $2x^2 + 5y^2 - 20x + 49 = 0$ in der x/y-Ebene. Schneidet sie folgende Ebenen und wenn ja, in welchen Punkten?

Für beide Aufgaben ist es ratsam, die Ebenen zunächst mit der x/y-Ebene ($z = 0$) zu schneiden, da nur dort ein Schnittpunkt vorliegen kann. Dies vereinfacht die Gleichung. Anschließend setzt man das Ergebnis in die Gleichung für die Ellipse ein und berechnet die Schnittpunkte.

a) $\vec{E} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$

$\vec{E}_{xy} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$

$(5-\lambda)^2 = -\frac{71}{5} \quad \Rightarrow$ Es gibt keinen Schnittpunkt.

b) $E: \quad x + 2z = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \quad \Rightarrow$

$y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow$ Schnittpunkte sind: $\begin{bmatrix} 0 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$

Aufgabe 6.4 Wiederholung: Gegeben Sei das skalare Potential der Erdanziehungskraft: $\Phi(r) = -G\frac{M_{Erde}}{r}$.

a) Berechnen Sie die ersten beiden Taylorpolynome an der Stelle $r = r_e$, dem Radius der Erde.

$$\Phi(r) \approx -G\frac{M_{Erde}}{r_e} + G\frac{M_{Erde}}{r_e^2} - 2G\frac{M_{Erde}}{r_e^3}$$

b) Ersetzen Sie jetzt $(r - r_e)$ durch z und $G\frac{M_{Erde}}{{r_e}^2}$ durch g. Außerdem können Sie die Konstante weg lassen, da ein Potential immer eine frei wählbare Konstante hat. Wenn Sie richtig gerechnet haben, erhalten Sie folgende Näherungsformel für das Gravitationspotential in der Nähe der Erdoberfläche:

$$\Phi \approx gz - \frac{g}{r_e}z^2$$

c) Berechnen Sie hieraus die wirkende Beschleunigung $\vec{a} = -\mathrm{grad}(\Phi) = -\vec{\nabla}\Phi = -g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - 2\frac{z}{r_e} \end{bmatrix}$.

d) Zeigen Sie explizit, dass das Kraftfeld Wirbelfrei ist, d.h. $\mathrm{rot}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \times \vec{a} = -g \begin{bmatrix} \frac{d}{dy}\left(1 - 2\frac{z}{r_e}\right) - 0 \\ 0 - \frac{d}{dx}\left(1 - 2\frac{z}{r_e}\right) \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$.

Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1 Bilden Sie das Produkt AB aus folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7.2 Zeigen Sie z.B. anhand der Matrizen aus Aufgabe 7.1, dass im allgemeinen gilt $AB \neq BA$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \neq BA$$

Aufgabe 7.3 Bestimmen Sie die Transponierten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ i & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -i \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 3 & i & 0 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & -i \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7.4 Gegeben seien zwei Matrizen A und B. Zeigen Sie, dass Matrix B die Inverse von Matrix A ist, bzw. A die Inverse von B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{13} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 5 \\ 7 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Einfachste Lösung: Berechne $A \cdot B = \mathbb{1}$

Aufgabe 7.5 Ermitteln Sie die Inverse von A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7.6 Berechnen Sie die Determinante von:

$$|A| = \left| \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right| = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 3 \qquad |B| = \left| \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right| = -9$$

Aufgabe 7.7 Beweisen Sie, dass $(AB)^T = B^T A^T$.

$$(AB)^T = (c_{ij})^T = c_{ji} = \sum_m a_{jm} b_{mi} = \sum_m b_{mi} a_{jm} = \sum_m b^T{}_{im} a^T{}_{mj} = B^T A^T$$

Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1 Gegeben sind folgende Vektoren in kartesischen Koordinaten. Wandeln Sie diese um in Polar- bzw. Zylinder und Kugelkoordinaten.

a) $\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \widehat{=} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \widehat{=} \begin{bmatrix} \sqrt{12} \\ \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -10\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} \end{bmatrix} \widehat{=} \begin{bmatrix} 20 \\ \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \widehat{=} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{\pi}{4} \\ \approx 0,9553 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \widehat{=} \begin{bmatrix} 1 \\ egal \\ 0 \end{bmatrix}$

Aufgabe 8.2 Integrieren Sie:

a) $\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1} x^2 dx dy = \frac{2}{3}$

b) $\int_{x=0}^{1}\int_{y=y_0}^{y_1}\int_{z=z_0}^{z_1} e^{az} dz dy dx = \frac{y_1-y_0}{a}\cdot(e^{az_1}-e^{az_0})$

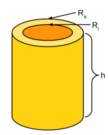
c) $\int_{x=0}^{2}\int_{y=x-1}^{3x} x^2 dy dx = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$

d) $\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2x}\int_{z=0}^{x+y} dz dy dx = \frac{4}{3}$

Warum müssen Sie bei den Aufgaben c) und d) die Reihenfolge beachten?
Die Reihenfolge muss beachtet werden weil die Grenzen des inneren Integrals von der Variable des äußeren Integrals abhängen.

Aufgabe 8.3 Berechnen Sie das Volumen eines Zylinderrings mit dem inneren Radius R_i, dem äußeren Radius R_a und der Höhe h

$$V = \int_{\rho=R_i}^{R_a}\int_{z=0}^{h}\int_{\phi=0}^{2\pi} \rho \, d\phi \, dz \, d\rho = \pi h\left({R_a}^2 - {R_i}^2\right)$$

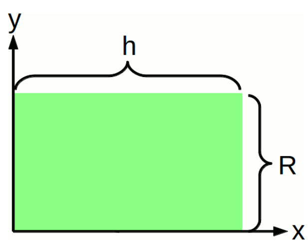


Aufgabe 8.4 Ein Rechteck der Länge h und der Breite R rotiert um die x-Achse. Dabei entsteht ein Zylinder.

a) Berechnen Sie das Volumen des Zylinders durch geschickte Integration.

$$V = \int_{\rho=0}^{R}\int_{z=0}^{h}\int_{\phi=0}^{2\pi} \rho \, d\phi \, dz \, d\rho = \pi h R^2$$

b) Berechnen Sie das Volumen des Zylinders mithilfe der Guldinsche Regel. Wie man leicht erkennt, liegt der Schwerpunkt bei $S = \frac{R}{2}$. Die Fläche ist $A = h \cdot R$. Damit ergibt sich für das Volumen $V = 2\pi S h = \pi h R^2$.



Aufgabe 8.5 Beweisen Sie die 2. Guldinsche Regel mithilfe der Definition des Schwerpunktes:

$$S = \frac{1}{A}\cdot\int_A \rho \, dz \, d\rho$$

Sei $f(\rho;z)$ eine Funktion, welche die aufspannende Fläche beschreibt, d.h. $f(\rho;z) = 1$, wenn $(\rho|z)$ ein Punkt auf der Fläche ist, ansonsten 0. Dann lässt sich das Volumen des Rotationskörpers wie folgt berechnen:

$$V = \int_V dV = \int_\rho\int_z\int_{\phi=0}^{2\pi} f(\rho;z)\cdot\rho \, d\phi \, dz \, d\rho = 2\pi\cdot\int_\rho\int_z f(\rho;z)\cdot\rho \, dz \, d\rho = 2\pi\cdot\int_A \rho \, dz \, d\rho = 2\pi S\cdot A$$